

Решения задач по функциональному анализу (2003 год).

1.

$$\|2x\| = 2\|x\| = \|x - y + x + y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$$

в силу неравенства треугольника. Отсюда

$$\|x\| \leq \frac{\|x - y\| + \|x + y\|}{2} \leq \max(\|x - y\|, \|x + y\|)$$

2. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое отображение $\|\cdot\|$.

А) Ответ: да.

Проверим все аксиомы нормы:

1) Пусть $x(t) \equiv 0, t \in [a, b] \Rightarrow \|x\| = 0$. Если же $\|x\| = 0$, то $x(t) \equiv 0, x \in [a, b]$. Следовательно, аксиома тождества выполнена.

2) Для любого $a \in R$ имеем

$$\|ax\| = \max_{t \in [a, b]} |ax(t)| = |a| \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = |a|\|x\|$$

Следовательно, аксиома линейности тоже выполнена.

3) Аксиома треугольника выполнена в силу соотношения

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)|,$$

которое следует из неравенства треугольника для модулей и очевидного соотношения (доказывается, например, от противного):

$$\max_{t \in [a, b]} (|x(t)| + |y(t)|) \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)|$$

В) Ответ: нет.

Поскольку из $\|x\| = 0$ следует $x'(t) \equiv 0 \rightarrow x(t) \equiv c$, где c - произвольная константа. Следовательно, не выполнена аксиома тождества и данное отображение нормой не является.

С) Ответ: нет.

Невыполнение первой аксиомы нормы проверяется аналогично рассуждениям, проведенным в предыдущем пункте.

Д) Ответ: да. Проверим все аксиомы нормы:

1) Если $x(t) \equiv 0$, то, очевидно, $\|x\| = 0$. Докажем обратное. Действительно, если $\|x(t)\| = 0$, то $\max_{t \in [a, b]} |x(t)| = 0$ и $x(a) = 0$. Из первого равенства следует, что $x(t) \equiv c, t \in [a, b]$, из второго - что $c = 0$. Получаем аксиому тождества.

2) Справедливость аксиомы линейности очевидна.

3) Аналогично доказательству, проведенному в пункте А), получаем соотношение

$$|x(a)+y(a)|+\max_{t\in[a,b]}|x'(t)+y'(t)|\leq\left(|x(a)|+\max_{t\in[a,b]}|x'(t)|\right)+\left(|y(b)|+\max_{t\in[a,b]}|y'(t)|\right)$$

откуда и следует справедливость аксиомы треугольника для данного отображения.

Е) Ответ: да.

Проверим все аксиомы нормы: 1) Очевидно, что $x \equiv 0 \rightarrow \|x\| = 0$.

Докажем обратное утверждение. Действительно, если $\|x\| = 0$, то $\int_a^b |x(t)| dt = 0$ и $|x'(t)| \equiv 0$. Из второго равенства следует, что $x(t) \equiv c$, где c - константа, равная в силу первого соотношения нулю.

2) Справедливость аксиомы линейности очевидна.

3) Доказательство аналогично проведенным в пунктах А) и D).

3. А) Множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$ не является открытым в силу теоремы Фейера, согласно которой любая непрерывная на отрезке функция равномерно (т.е. по норме $C[a, b]$) приближается средними Чезаро частичных сумм своего ряда Фурье, которые алгебраическими многочленами не являются. Следовательно, любая окрестность произвольной точки данного множества содержит в себе функцию, не принадлежащую этому множеству.

В) Множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$ не является и замкнутым. Рассмотрим пример. Как известно, ряд Тейлора для функции $\sin x$ сходится к ней на всей числовой прямой, причем на любом ограниченном множестве - равномерно. Следовательно, частичные суммы этого ряда (суть алгебраические многочлены) сходятся к $\sin x$ в смысле нормы произвольного пространства $C[a, b]$ при любых конечных a и b . $\sin x$ не является алгебраическим многочленом, из чего следует незамкнутость данного множества.

4. Обозначим данное пространство через X , а его многообразие - через L . Докажем, что L замкнуто. Пусть это не так, т.е. существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L : x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty, x_0$ не принадлежит L . Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{\|x-x_0\|}{S_{\varphi(x_1)}(x_0)}, x \in L$. Возьмем произвольный $x_1 \in L$ и рассмотрим замкнутый шар $S_{\varphi(x_1)}(x_0)$. Обозначим $L \cap S_{\varphi(x_1)}(x_0)$ через F . Тогда, очевидно, $\inf_{x \in L} \varphi(x) = \inf_{x \in F} \varphi(x)$. Множество F конечномерное, замкнутое, ограниченное, функция $\varphi(x) \in C(F)$ согласно неравенству треугольника $\Rightarrow \exists x_* \in F : \varphi(x_*) = \inf_{x \in F} \varphi(x) = \inf_{x \in L} \varphi(x)$. Отсюда $\rho(x_0, L) = \|x_0 - x_*\| > 0$ по нашему предположению. Однако это противоречит сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 . Следовательно, L замкнуто и является подпространством X .

5. Пусть это не так, т.е. $\exists x_0 \in L, \varepsilon > 0$: шар $S_\varepsilon(x_0) \subset L$. Чтобы прийти к противоречию, покажем, что $\forall x_1 \in X x_1 \in L$.

$x_1 = (x_1 - x_0) + x_0, x_0 \in L \Rightarrow$ поскольку L - многообразие, достаточно показать, что $x_1 - x_0 \in L$.

$$x_1 - x_0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}.$$

$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \in L$ по нашему предположению. Следовательно, по определению линейного многообразия $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} = x_1 \in L$. Мы пришли к противоречию с условием задачи, следовательно, L не содержит никакого шара.

6. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое множество L .

А) Ответ: нет.

Поскольку L не является даже линейным многообразием. Рассмотрим, например, $f(x) = x \in L, g(x) = e^x \in L$. Но $h(x) = g(x) - f(x) = e^x - x$ не принадлежит L .

В) Ответ: да.

То, что L - линейное многообразие, очевидно. Докажем замкнутость L . Пусть это не так, т.е. $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L : x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty, x$ не принадлежит L . Тогда $\exists t_0 \in (0, 1] : x(t_0) \neq x(-t_0)$. По определению сходимости в пространстве $C[-1, 1] \max_{t \in [-1, 1]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, имеет место сходимость рассматриваемой последовательности в точках t_0 и $-t_0$. Однако $x_n(-t_0) = x_n(t_0) \rightarrow x(t_0), n \rightarrow \infty$, что противоречит сделанному предположению $x(t_0) \neq x(-t_0)$. Следовательно, L замкнуто и образует подпространство в $C[-1, 1]$.

С) Ответ: нет.

Поскольку в пункте В) задачи 3 была доказана незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1, 1]$.

Д) Ответ: нет.

Покажем, что L не является замкнутым множеством. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, 0], \\ x^2 & , \quad x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Введем обозначения: $\frac{k}{2^n} = x_n^k, f(x_n^k) = f_n^k, k = 0, \dots, 2^n$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n^k + \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} (x - x_n^k) & , \quad x \in (x_n^k, x_n^{k+1}], k = 0, \dots, 2^n, \\ 0 & , \quad x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \in L$. Покажем, что $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$, откуда будет следовать незамкнутость L в $C[-1, 1]$.

Введем вспомогательную последовательность функций $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$ при $x \in (x_n^k, x_n^{k+1}], k = 0, \dots, 2^n - 1$. Исследуем $\varphi_n(x) \in C^1[x_n^k, x_n^{k+1}], \forall k = 0, \dots, 2^n - 1$ на экстремальные значения при $x \in [x_n^k, x_n^{k+1}], k = 0, \dots, 2^n - 1$.

$$\varphi'_n(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k} \Leftrightarrow x = \frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}$$

$\forall k = 0, \dots, 2^n - 1$ $\varphi_n(x_n^k) = \varphi_n(x_n^{k+1}) = 0$, $\varphi_n(x)$ выпукла вверх на любом из рассматриваемых отрезков, следовательно, она достигает максимума в той точке отрезка $[x_n^k, x_n^{k+1}]$, где ее производная обращается в нуль, т.е. при $x = \frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}$. Поэтому

$$\max_{x \in [x_n^k, x_n^{k+1}]} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2}\right) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| &= \max_{k=0, \dots, 2^n - 1} \max_{x \in (x_n^k, x_n^{k+1})} |f_n(x) - f(x)| = \max_{k=0, \dots, 2^n - 1} \max_{x \in (x_n^k, x_n^{k+1})} \varphi_n(x) = \\ &= \max_{k=0, \dots, 2^n - 1} \frac{1}{2^{2(n+1)}} = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, получена последовательность функций из L , сходящаяся к функции, которая не принадлежит L . Следовательно, L не является подпространством $C[-1, 1]$.

7. Всюду в этой задаче будем обозначать рассматриваемое множество L .

А) Ответ: да.

Это является следствием из задачи 4.

В) Ответ: нет.

Рассмотрим пример, демонстрирующий незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1, 1]$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}), \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ x & , \quad x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

при $n = 1, 2, \dots$. Легко проверяется, что $\forall n$ $f_n(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$, однако

$$|f_n(x) - |x|| = f_n(x) - |x| = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, 1], \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = \frac{1}{2n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $f_n(x) \rightarrow |x|$, $n \rightarrow \infty$. Но $|x|$ не принадлежит L , следовательно, L не замкнуто.

С) Ответ: нет.

Рассмотрим пример, демонстрирующий незамкнутость L относительно нормы пространства $C[-1, 1]$. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, 0), \\ \frac{2^{n+1}}{n}x - \frac{2}{n} & , \quad x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}], \\ -\frac{2^{n+1}}{n}x + \frac{4}{n} & , \quad x \in (\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}]. \end{cases}$$

Тогда $f(x) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$, $f(\frac{1}{2^n}) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ и $\sup_{x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]} f(x) = f(\frac{3}{2^{n+1}}) = \frac{1}{n}$ по построению.

При $x \neq 0$ непрерывность этой функции очевидна. Непрерывность $f(x)$ при $x = 0$ следует из очевидной (в силу кусочной линейности и непрерывности $f(x)$ при $x \neq 0$) оценки $|f(x)| \leq \frac{1}{n}$ при $x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ при произвольном $n \in N$. Покажем, что вариация функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ $\omega(f(x)) = +\infty$. Действительно, суммированием вариаций по полуинтервалам $(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ получаем, что $\omega(f(x)) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Однако $f(x)$ может быть с любой точностью равномерно на отрезке $[-1, 1]$ (т.е. по норме пространства $C[-1, 1]$) приближена функцией с ограниченной вариацией. Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (0, \frac{1}{2^n}), \\ 0 & , \quad x \in [-1, 0] \cup [\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

при таком $n \in N$, что справедливо $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $f_n(x) \in L$, т.к. она является кусочно-линейной и непрерывной на $[-1, 1]$. В то же время $\max_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in (0, \frac{1}{2^n})} |f_n(x) - f(x)| = \max_{k=n, n+1, \dots} (\max_{x \in (\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})} |f_n(x) - f(x)|) = \max_{k=n, n+1, \dots} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Тем самым показана незамкнутость L .

D) Ответ: да.

То, что L - линейное многообразие, очевидно. Возьмем $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L$. Замкнутость L следует из цепочки соотношений:

$f_n \rightarrow f$ по норме $C[-1, 1] \Leftrightarrow \max_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow |f_n(0) - f(0)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \in L$, т.к. равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, а $f_n(0) \equiv 0$.

8. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$.

По определению $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} (x, y) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$. Пусть $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ - минимизирующая последовательность для x_1 , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_1 - y_n^1\| = \rho(x_1, A)$. Тогда согласно неравенству треугольника $\|x_2 - y_n^1\| \leq \|x_1 - y_n^1\| + \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y_n^1\| + \varepsilon$. Следовательно, $\rho(x_2, A) = \inf_{y \in A} \|x_2 - y\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_2 - y_n^1\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_1 - y_n^1\| + \varepsilon = \rho(x_1, A) + \varepsilon$. Аналогично показывается, что $\rho(x_1, A) \leq$

$\rho(x_2, A) + \varepsilon$. Следовательно, $|\rho(x_2, A) - \rho(x_1, A)| \leq \varepsilon \Rightarrow$ функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывна по определению (достаточно положить в нем $\delta = \varepsilon$).

9. Возьмем базис пространства X $e_1, e_2, \dots, e_n$. Линейная оболочка $e_1, \dots, e_n$ (обозначим ее $L(e_1, \dots, e_n)$) по определению является линейным многообразием. В силу конечности базиса оно конечномерно; пространство X - линейное, нормированное $\Rightarrow L(e_1, \dots, e_n)$ - подпространство пространства X (см. задачу №4). Следовательно, любая фундаментальная последовательность элементов из $L(e_1, \dots, e_n)$ сходится по норме к элементу из $L(e_1, \dots, e_n)$. По определению базиса линейного пространства $L(e_1, \dots, e_n) = X \Rightarrow X$ - полное по своей норме пространство $\Rightarrow X$ - банахово.

10. X - банахово пространство $\Rightarrow$ оно является линейным, нормированным и полным относительно своей нормы. Рассмотрим его подпространство L . Оно линейно, т.к. является линейным многообразием в X . В L можно ввести норму, положив $\forall x \in L \|x\|_L = \|x\|_X$. Из справедливости аксиом нормы в X очевидно следует справедливость их и в L . L - подпространство $\Rightarrow \forall$ фундаментальная последовательность элементов из L сходится к элементу из L . Из всего вышесказанного следует, что L - пространство, полное относительно своей нормы, т.е. банахово.

11. Ответ: да.

Рассмотрим банахово пространство R (пространство вещественных чисел) и последовательность непустых замкнутых вложенных множеств в нем: $X_i = [i, +\infty), i = \overline{1, +\infty}$. Очевидно, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \emptyset$.

12. Преобразуем обе части рассматриваемого тождества, начиная с левой:

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = (z - x, z - x) + (z - y, z - y) = 2(z, z) + (x, x) + (y, y) - (x, z) - (z, x) - (y, z) - (z, y)$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$\frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(x - y, x - y) + 2\left(z - \frac{x+y}{2}, z - \frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(x, x) - \frac{1}{2}(x, y) - \frac{1}{2}(y, x) + \frac{1}{2}(y, y) + 2(z, z) - (z, x) - (z, y) - (x, z) + \frac{1}{2}(x, x) + \frac{1}{2}(x, y) - (y, z) + \frac{1}{2}(y, x) + \frac{1}{2}(y, y) = 2(z, z) + (x, x) + (y, y) - (x, z) - (z, x) - (y, z) - (z, y)$$

Следовательно, тождество Аполлония действительно выполнено для $\forall x, y, z$ из пространства со скалярным произведением.

13. Необходимость очевидна. Действительно, $\forall x \perp L$ и $\forall y \in L$ справедливы соотношения

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

Докажем достаточность. Для этого воспользуемся теоремой Леви. Разложим x указанным в ней способом: $x = y + z, y \in L, z \perp L$. По условию $\|x\| \leq$

$\|x - h\|, \forall h \in L$, для доказательства утверждения необходимо доказать, что $y = 0$. Имеем $\|y + z\| \leq \|y + z - h\|, \forall h \in L$. Пусть $h = y$. Тогда

$$\|h + z\| \leq \|z\| \Leftrightarrow (h + z, h + z) \leq (z, z) \Leftrightarrow \{z \perp h\} \Leftrightarrow (h, h) + (z, z) \leq (z, z) \Rightarrow (h, h) = 0 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = 0$$

14. То, что M является линейным многообразием, очевидно. Действительно, $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in M$ рассмотрим $z = \alpha x + \beta y = (z_1, z_2, \dots)$.

$$\sum_{k=1}^n z_k = \alpha \sum_{k=1}^n x_k + \beta \sum_{k=1}^n y_k = 0$$

Следовательно, $z \in M$.

Докажем замкнутость L относительно нормы l_2 . Пусть $x^1, x^2, \dots \in M, x^k \rightarrow x \in l_2, k \rightarrow \infty$. Докажем, что $x \in M$. Из сходимости в l_2 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} (x_l^k - x_l)^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty &\Leftrightarrow \sum_{l=1}^n (x_l^k - x_l)^2 + \sum_{l=n+1}^{\infty} (x_l^k - x_l)^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \\ \sum_{l=1}^n (x_l^k - x_l)^2 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty &\Rightarrow x_l^k \rightarrow x_l, k \rightarrow \infty, \forall l = 1, \dots, n \Rightarrow x_l = 0, \forall l = \\ 1, \dots, n, \text{ т.к. } x^k \in M, \forall k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, $x \in M \Rightarrow M$ - замкнуто относительно нормы в l_2 , т.е. является подпространством в l_2 .

Построим ортогональное дополнение N к подпространству M , тогда, по следствию из теоремы Леви, $M \oplus N = l_2$. Возьмем $\forall y \in N$. Докажем, что $y_p = 0, \forall p > n$. Пусть $x : x_p = 1, x_i = 0, \forall i \neq p$. Очевидно, что $x \in l_2$. По выбору x имеем $(x, y) = y_p \neq 0$. Но $y \in N$, мы пришли к противоречию $\Rightarrow y_i = 0, \forall y \in N, \forall i \geq n + 1$.

Теперь очевидно, что $N = L(e^N)$, где

$$e_i^N = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1, \dots, n; \\ 0 & , \quad i = n + 1, n + 2, \dots \end{cases}$$

Докажем это. Пусть $X_n = \sum_{i=1}^n x_i, \forall x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Запишем тогда x в следующем виде:

$$x = X' + X'' = \frac{X_n e^N}{n} + X''$$

Видно, что $X' \in L(e^N)$.

$$X_n'' = X_n - X_n' = X_n - n \frac{X_n}{n} = 0 \Rightarrow x_n'' \in M$$

Следовательно, $\forall x \in l_2$ раскладывается по M и $L(e^N)$. Очевидно, что $e^N \perp M \Rightarrow L(e^N) \perp M$. Из последних двух утверждений следует, что $L(e^N) = M^\perp$. Итак, в качестве N можно взять

$$L(e^N) = \{x \in l_2 : x_i = \alpha, \forall \alpha \in R, \forall i = 1, \dots, n; x_i = 0, \forall i = n+1, n+2, \dots\}$$

15. Пространство l_2 является гильбертовым. Согласно известному утверждению, множество в гильбертовом пространстве всюду плотно $\Leftrightarrow$ лишь нулевой элемент пространства ортогонален всем элементам этого множества. Докажем, что рассматриваемое множество $L(x_1, x_2, \dots)$ обладает этим свойством. Пусть это не так, т.е. $\exists f = (f^1, f^2, \dots) \in l_2 : f \neq 0$, но $f \perp x_k$ при $\forall k \in N$. Рассмотрим $p \in N : f^1 = f^2 = \dots = f^{p-1} = 0$, но $f^p \neq 0$. Т.к. $f \in l_2$, $\exists C > 0 : |f^n| \leq C, \forall n \in N$. Тогда $\forall k \in N$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}} \right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{C}{(2^k)^n} = C \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} \leq \{ \forall k \in N \} \leq \frac{2C}{2^{k(p+1)}}$$

С другой стороны, нами получено, что

$$\frac{f^p}{2^{kp}} = - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{f^p}{2^{kp}} \right| \leq \frac{2C}{2^{k(p+1)}}, \forall k \in N$$

Однако

$$\frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\frac{f^p}{2^{kp}}} = \frac{2C}{f^p 2^k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

что, очевидно, противоречит тому, что

$$\frac{\frac{2C}{2^{k(p+1)}}}{\frac{f^p}{2^{kp}}} \geq 1, \forall k \in N$$

Следовательно, наше предположение о существовании ненулевого элемента пространства l_2 , ортогонального сразу всем элементам $L(x_1, x_2, \dots)$, неверно, откуда следует, что это множество всюду плотно в l_2 .

16. В силу свойств производной $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in C^1[a, b]$ имеем

$$A(\alpha x + \beta y) = \frac{d}{dt}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta \frac{dy(t)}{dt} = \alpha Ax + \beta Ay$$

Следовательно, оператор A линеен.

Для доказательства ограниченности оператора A , покажем, что он переводит замкнутый единичный шар с центром в нуле в пространстве $C^1[a, b]$ в ограниченное

множество в пространстве $C[a, b]$ (в силу линейности оператора A этого достаточно). $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ имеем

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\|_C = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \leq 1$$

Итак, оператор A является линейным и ограниченным. Найдем его норму. Как видно из вышеприведенных выкладок $\|Ax\|_C \leq \|x\|_{C^1} \Rightarrow \|A\| \leq 1$. Покажем, что $\|A\| = 1$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n+1}$, $n = 4, 5, \dots$

$$\|x_n\|_{C^1} = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\sin nt}{n+1} \right| + \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{n \cos nt}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1, \forall n = 4, 5, \dots$$

В то же время

$$\|Ax_n\|_C = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{n \cos nt}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

Итак, мы получили максимизирующую последовательность элементов из $C^1[a, b]$, показывающую, что $\|A\| = 1$.

В) Линейность оператора A следует из свойства линейности интеграла Лебега. Докажем ограниченность A . $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax(t)\| &= \left(\int_0^1 \left(t \int_0^1 x(\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2 dt \left(\int_0^1 x(\tau) d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \int_0^1 x(\tau) d\tau \right| \leq \\ \{ \text{неравенство Коши-Буняковского} \} &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 x^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ \text{Оператор } A &\text{ ограничен.} \end{aligned}$$

Найдем норму оператора A . Для этого возьмем $x(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$. Тогда $\|x\| = 1$, а $\|Ax\| = \left(\int_0^1 t^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Нами было показано, что $\forall x \in \overline{S_1(0)}$ $\|Ax\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. В то же время нашелся элемент из $\overline{S_1(0)}$, на котором это значение нормы образа достигается $\Rightarrow \|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$17. \text{ А) } R(A) = \{y \in Y : \exists x \in X : Ax = y\}$$

Для того, что $R(A)$ было линейным многообразием, необходимо выполнение условия:

$$\forall \alpha, \beta, \forall y_1, y_2 \in R(A) \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(A), \text{ то есть } \exists x \in X : Ax = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

$$\text{Так как } y_1, y_2 \in R(A) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X : Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2.$$

Из того, что A линейный оператор следует $A\alpha x_1 = \alpha y_1, A\beta x_2 = \beta y_2$ и $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$.

Так как X линейное пространство, то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in X$, что и т. д.

В) Ответ: нет.

Рассмотрим оператор $A : C^2[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$, $Af(t) = \frac{df}{dx}$. Тогда, очевидно, $R(A) \in C^1[-1, 1]$. Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций из задачи 7B), а именно

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}), \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & , \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ x & , \quad x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Пусть $g_n(x) = \int_{-1}^x f_n(x)dx$. Тогда $g_n(x) \in C^2[-1, 1]$ и, очевидно, $Ag_n = f_n$.

В задаче 7B) показано, что $f_n(x) \rightarrow f(x) = |x|$ по норме пространства $C[-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$. Однако $f(x) = |x|$ не принадлежит пространству $C^1[-1, 1]$. Как установлено нами в начале доказательства $R(A) \in C^1[-1, 1] \Rightarrow R(A)$ не является замкнутым множеством, а значит, не является и подпространством.

18. Согласно теореме 3 из §7 пространство $L(X \rightarrow X)$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве, само является банаховым, т.е. любая фундаментальная последовательность элементов из этого пространства сходится к элементу этого же пространства. Рассмотрим операторную последовательность

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}. \text{ Если } A \in L(X \rightarrow X), \text{ то и } A_n \in (X \rightarrow X), \forall n \in$$

N (в самом деле, линейность A_n очевидна, а непрерывность вытекает из того, что A_n суть суперпозиция конечного числа непрерывных операторов). Следовательно, если мы докажем фундаментальность $\{A_n\}$, то тем самым мы докажем существование и принадлежность пространству $L(X \rightarrow X)$

$$\text{оператора } \sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Фундаментальность последовательности $\{A_n\}$ следует из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \|A_{n+p} - A_n\| &= \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\| \leq \{ \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in L(X \rightarrow X), \text{ что следует из определения операторной нормы} \} \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^k \|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \\ \{\forall p \in N\} &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ т.к. это хвост сходящегося ряда для } e^{\|A\|}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{A_n\}$ фундаментальна и определенность оператора $\sin A, \forall A \in L(X \rightarrow X)$ доказана. Случай с $\cos A$ разбирается совершенно аналогично.

$$19. \text{ По определению } e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}, \forall A \in L(X \rightarrow X).$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| &\leq \{\forall n \in N\} \leq \left\| \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}, \text{ т.к. } &\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \rightarrow 0, \text{ что следует из сходимости ряда в смысле нормы в } L(X \rightarrow X). \end{aligned}$$

Тем самым утверждение доказано. Найдем e^I по определению:

$$(e^I)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{k!} \right) x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I}{k!} \right) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Ix}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k!} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = ex, \forall x \in X \Rightarrow e^I = eI.$$

20. Обозначим $x_1 = dx/dt$, $x_2 = dx_1/dt$. Тогда задача примет вид:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 \\ dx_2/dt = -x_1 + y(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Или $\frac{dX}{dt} = BX + Y$, где $X = (x_1, x_2)$, $Y = (0, y(t))$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

По теореме Каратеодори

(задача Коши

$$\begin{cases} dX/dt = BX(t) + Y(t), t \in [t_0, t_1] \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

где $Y(t)$ интегрируема по Лебегу, имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций и это решение дается формулой $X(t) = e^{(t-t_0)B}(X_0 + \int_{t_0}^t e^{-sB}Y(s)ds)$

решение этой задачи выглядит так: $X(t) = e^{tB}(X_0 + \int_0^t e^{-sB}Y(s)ds)$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, e^{-sB} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } x(t) = x_1(t) = -(\cos(t) \int_0^t y(s) \sin(s)ds + \sin(t) \int_0^t y(s) \cos(s)ds)$$

$$\text{Заметим, что } \|x(t)\| = \| -(\cos(t) \int_0^t y(s) \sin(s)ds + \sin(t) \int_0^t y(s) \cos(s)ds) \| \leq$$

$$\|y(t)\| |\cos(t) \int_0^t \sin(s)ds| + |\sin(t) \int_0^t \cos(s)ds| \leq 4\|y(t)\|$$

21. По определению $\exists A^{-1}$, если $\exists!$ решение задачи $Ax(t) = y(t)$.

Пусть $N(A) = \{x \in C[0, 1] : Ax = 0\}$.

$$0 = \int_0^t e^{-|s-t|} x(s)ds = \int_0^t e^{s-t} x(s)ds = e^{-t} \int_0^t e^s x(s)ds$$

$$0 = \int_0^t e^s x(s)ds$$

$$0 = e^s x(s) \forall s \in [0, 1]$$

$$0 = x(s) \forall s \in [0, 1]$$

$$N(A) = \{\theta\}$$

Пусть $\exists x_1(t), x_2(t) \in C[0, 1] : Ax_1(t) = Ax_2(t) = y(t)$

$$\begin{aligned}
Ax_1(t) - Ax_2(t) &= 0 \\
A(x_1(t) - x_2(t)) &= 0 \\
x_1(t) - x_2(t) &= 0 \\
x_1(t) &= x_2(t)
\end{aligned}$$

24. Другими словами, надо доказать, что $\forall c \in C \exists x \in X : f(x) = c$

Известно, что $\dim C = 2$. Если мы докажем, что $R(f)$ (область изменения линейного функционала f) содержит 2 линейно-независимых вектора, то благодаря линейности функционала мы получаем все C , так как $C = \{y = ae_1 + be_2, \forall a, b \in R e_1, e_2 \text{ базис в } C\}$.

Пусть $z : f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = x + iy$. Так как X комплексное линейное пространство, то $ix \in X \Rightarrow f(ix) = ix - y \in R(f)$.

Докажем линейную независимость $f(x)$ и $f(ix)$:

$a(x + iy) + b(ix - y) = 0 \Leftrightarrow ax - by = ay + bx = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow f(x)$ и $f(ix)$ линейно независимы.

25. Линейность:

$$f(\alpha x) = 2[\alpha x(1) - \alpha x(0)] = 2\alpha[x(1) - x(0)] = \alpha f(x)$$

$$f(x + y) = 2[(x(1) + y(1)) - (x(0) + y(0))] = 2[x(1) - x(0)] + 2[y(1) - y(0)] = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = 2|x(1) - x(0)| \leq 4\|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности

$f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 4$. Если мы найдем функцию, в которой значение для $\|f\|$ достигает 4, то норма этого линейного функционала равна 4. Рассмотрим $\cos(\pi(x + 1))$

$$\cos(\pi(0 + 1)) = -1$$

$$\cos(\pi(1 + 1)) = 1$$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(\cos(\pi(x+1)))\|}{\|\cos(\pi(x+1))\|} = 4 \text{ В) } f(x) = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^0 x(t) dt -$$

$$\int_0^1 x(t) dt.$$

Решение: Линейность:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^0 \alpha x(t) dt - \int_0^1 \alpha x(t) dt = \alpha \int_{-1}^0 x(t) dt - \alpha \int_0^1 x(t) dt = \alpha f(x)$$

$$f(x + y) = \int_{-1}^0 x(t) + y(t) dt - \int_0^1 x(t) + y(t) dt = \int_{-1}^0 x(t) + dt \int_{-1}^0 y(t) dt -$$

$$\left(\int_0^1 x(t) dt + \int_0^{-1} y(t) dt \right) = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt \right| \leq \int_{-1}^0 |x(t)| dt + \int_0^1 |x(t)| dt \leq \|x\| \left(\int_{-1}^0 1 dt + \int_0^1 1 dt \right) \leq 2\|x\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности

$f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 2$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 2, то норма этого линейного функционала равна 2. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} 1, & x < -1/n \\ -\sin \pi n x, & x \in [-1/n, 1/n] \\ -1, & x > 1/n \end{cases}$$

$$z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 2$$

26. Линейность:

$$f(\alpha x) = \sum_{k=1}^n \alpha \alpha_k x(t_k) = \alpha \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k) = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x(t_k) + y(t_k)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k y(t_k) = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |x(t_k)| \leq \|x\| \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности

$f(x)$ видно, что $\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$. Если мы найдем функцию, в которой значение

для $\|f\|$ достигает $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|$, то норма этого линейного функционала равна

$\sum_{k=1}^n |\alpha_k|$. Рассмотрим $z(t)$ построенную таким образом: в точках t_k она принимает

значение $\text{sign}(\alpha_k)$, в других точках необходимо дополнить функцию по непрерывности.

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$$

$$\text{В) } f(x) = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0),$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in [-1, 1]$.

Решение: Линейность:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^1 \alpha x(t) dt - \alpha x(0) = \alpha \left(\int_{-1}^0 x(t) dt - x(0) \right) = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^0 x(t) + y(t) dt - (x(0) + y(0)) = \int_{-1}^0 x(t) dt - x(0) + \int_{-1}^0 y(t) dt - y(0) = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \int_{-1}^0 x(t) dt - x(0) \right| \leq \int_{-1}^0 |x(t)| dt + |x(0)| \leq \|x(t)\| \left(\int_{-1}^0 1 dt + 1 \right) \leq$$

$$2\|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности

$f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 2$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 2, то норма этого линейного функционала равна 2. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} 1, & x < -1/n \\ -\cos \pi n x, & x \in [-1/n, 1/n] \\ 1, & x > 1/n \end{cases}$$

$$z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 2$$

$$27. \text{ A) } |\langle x, f \rangle| = \left| \int_0^1 x(t^2) dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{x(t^2)}{2t} d(t^2) \right| = [y = t^2] \left| \int_0^1 \frac{x(y)}{2\sqrt{y}} dy \right| \leq \|x(y)\| \left| \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \right| =$$

$$\|x(y)\| \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \|x(y)\| \lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{y} \Big|_{\delta}^1 = \|x(y)\|$$

$$\text{B) } |\langle x, f \rangle| = \left| \int_0^1 x(t^n) dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{x(t^n)}{n t^{n-1}} d(t^n) \right| = [y = t^n] \left| \int_0^1 \frac{x(y)}{n y^{\frac{n-1}{n}}} dy \right| \leq \|x(y)\| \left| \int_0^1 \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}} dy \right| =$$

$$\|x(y)\| \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}} dy = \|x(y)\| \lim_{\delta \rightarrow 0} y^{1/n} \Big|_{\delta}^1 = \|x(y)\|$$

28. A) Линейность:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^1 \alpha t x(t) dt = \alpha \int_{-1}^1 t x(t) dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^1 t x(t) + t y(t) dt = \int_{-1}^1 t x(t) dt + \int_{-1}^1 t y(t) dt = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \int_{-1}^1 tx(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |t||x(t)|dt \leq \|x(t)\| \left(\int_{-1}^1 |t|dt \right) = \|x(t)\| \left(\int_{-1}^0 -tdt + \int_0^1 tdt \right) \leq \|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности $f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционала равна 1. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} -1, & x < -1/n \\ \sin \pi n x, & x \in [-1/n, 1/n] \\ 1, & x > 1/n \end{cases}$$

$$z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$$

В) Линейность:

$$f(\alpha x) = \int_{-1}^1 \alpha tx(t)dt = \alpha \int_{-1}^1 tx(t)dt = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \int_{-1}^1 tx(t)dt + \int_{-1}^1 ty(t)dt = \int_{-1}^1 tx(t)dt + \int_{-1}^1 ty(t)dt = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \int_{-1}^1 tx(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |t||x(t)|dt \leq \|x(t)\| \max_{t \in [-1,1]} |t| \leq \|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности $f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем последовательность функций, в пределе которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционала равна 1. Рассмотрим

$$x_n = \begin{cases} 0, & x < 1 - 1/n \\ n, & x \geq 1 - 1/n \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 tx_n(t)dt = \int_{1-1/n}^1 tndt = t^2 n/2 \Big|_{1-1/n}^1 = 1 - 1/n$$

$$z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, x < 1$$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$$

29. Линейность:

$$f(\alpha x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \frac{x_k}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k+y_k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = f(x) + f(y)$$

Непрерывность: Линейный оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен. Поэтому достаточно доказывать ограниченность оператора.

$$\|f(x)\| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{|k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x(t)\|$$

Норма: $\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Заметим, что из доказательства ограниченности

$f(x)$ видно, что $\|f\| \leq 1$. Если мы найдем функцию, в которой значение для $\|f\|$ достигает 1, то норма этого линейного функционала равна 1. Рассмотрим $z(t) = (1, 0, 0, \dots)$

$$\|f\| = \sup_{x(t) \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(z(t))\|}{\|z(t)\|} = 1$$

30. Линейность:

$$f(\alpha x) = \frac{\alpha x(-1) + \alpha x(1)}{2} + \int_{-1}^1 t \alpha x(t) dt = \alpha \left(\frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^1 t x(t) dt \right) = \alpha f(x)$$

$$f(x+y) = \frac{(x(-1)+y(-1))+(x(1)+y(1))}{2} + \int_{-1}^1 t(x(t)+y(t))dt = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^1 t x(t) dt + \frac{y(-1)+y(1)}{2} + \int_{-1}^1 t y(t) dt = f(x) + f(y)$$

Ограниченность:

$$\|f(x)\| = \left| \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^1 t x(t) dt \right| \leq \frac{|x(-1)|+|x(1)|}{2} + \int_{-1}^1 |t| |x(t)| dt \leq \|x(t)\| \left(1 + \int_{-1}^1 |t| dt \right) \leq 2 \|x(t)\|$$

31. А) $L_2[0, 1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0, 1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ положить $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0, 1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.

В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A , если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int_0^1 \left(\int_0^t x(\tau) d\tau \right) y(t) dt = \int_0^1 \int_0^t x(\tau) y(t) d\tau dt = \int_0^1 \int_{1-t}^1 x(\tau) y(t) d\tau dt =$$

$$= \int_0^1 \int_{\tau}^1 x(\tau) y(t) dt d\tau = \int_0^1 x(\tau) \left(\int_{\tau}^1 y(t) dt \right) d\tau = \int_0^1 x(t) \left(\int_t^1 y(\tau) d\tau \right) dt = (x(t), A^*y(t))$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y(t) = \int_t^1 y(\tau) d\tau.$$

В) Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(Ax(t), y(t)) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 tx(s)ds \right) y(t)dt = \int_0^1 \int_0^1 tx(s)y(t)dsdt = \int_0^1 \int_0^1 sx(t)y(s)dsdt = \\ &= \int_0^1 x(t) \int_0^1 sy(s)dsdt = (x(t), A^*y(t))\end{aligned}$$

Тогда очевидно сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y(t) = \int_0^1 sy(s)ds.$$

32. А) В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A , если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)_i} = (x, A^*y)$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots).$$

В) Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_{i-1} \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(A^*y)_i} = (x, A^*y)$$

Тогда сопряженный оператор к оператору A имеет вид: $A^*y = (y_2, y_3, \dots)$.

33. А) В гильбертовом пространстве оператор A^* является сопряженным к оператору A , если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Комплексное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (\lambda_i \bar{y}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{(\lambda_i y_i)} = \\ &= (x, A^*y)\end{aligned}$$

Таким образом, сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \dots).$$

В) Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1} \bar{y}_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_i \bar{y}_{i-1} = (x, A^*y)$$

Тогда очевидно сопряженный оператор к оператору A имеет вид:

$$A^*y = (0, y_1, y_2, \dots).$$

34. А) Ответ: нет.

В силу линейности A и компактности любого подмножества компакта достаточно проверить, является ли образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0, 1]$ при отображении A равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным множеством функций из $C[0, 1]$. Это следует из теоремы Арцела, утверждающей, что из равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций из $C[a, b]$, $a, b \in R$, и только из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на $[a, b]$ равномерно, т.е. по норме $C[a, b]$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t} \sin \frac{1}{t^2} & , \quad t \in (0, 1], \\ 0 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

$x(t) \in C[0, 1]$, т.к. $|x(t)| \leq \sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$ и поэтому $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0 = x(0)$.

Тогда

$$Ax(t) = t^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{t^2},$$

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \sin \frac{1}{t^2} + t^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{t^2} \left(-\frac{2}{t^3} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{t^2}, t \in (0, 1].$$

$\frac{d}{dt}(Ax(t))$, очевидно, не является ограниченной на $(0, 1]$ функцией $\Rightarrow Ax(t)$ не равномерно непрерывна на $[0, 1] \Rightarrow$ шар, содержащий в себе $x(t)$, не будет отображен в равностепенно непрерывное множество, следовательно, A не является компактным оператором.

В) Ответ: да.

Компактность оператора A вытекает из следующего полезного утверждения: Если функция $K(s, t)$ ограничена на квадрате $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$ и все ее точки разрыва лежат на конечном числе кривых

$$t = \varphi_k(s), k = 1, \dots, n,$$

где φ_k - непрерывные функции, то формула

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s, t) dt$$

определяет в пространстве $C[a, b]$ компактный (вполне непрерывный) оператор. Доказательство этого утверждения приведено на стр. 275 – 276 учебника А.Н.Колмогорова и С.В.Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа".

В нашем случае $K(s, \tau) \equiv 1 \Rightarrow A$ - вполне непрерывный оператор.

С) Ответ: да.

Пусть $x(t) \in \overline{S_1(0)} \subset C[0, 1]$. Тогда $|Ax(t)| = |x(0) + tx(1)| \leq 2, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow A(\overline{S_1(0)})$ - равномерно ограниченное множество функций.

$\forall x(t)$ $Ax(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, 1] \Rightarrow$ равностепенная непрерывность $\{Ax(t)\}$ равносильна равномерной ограниченности $\{\frac{d}{dt}(Ax(t))\}$. $\frac{d}{dt}(Ax(t)) = x(1)$, а $|x(1)| \leq 1 \Rightarrow A(\overline{S_1(0)})$ - равностепенно непрерывное множество. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным.

D) Ответ: да.

Доказательство вполне непрерывности A сводится к применению утверждения, приведенного в решении пункта B).

E) Ответ: нет.

Пусть $x(t) = \sqrt{t} \sin \frac{1}{t}, t \in [0, 1]$. Очевидно, $x(t) \in C[0, 1]$.

$$Ax(t) = t \sin \frac{1}{t^2},$$

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) = \sin \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2} \cos \frac{1}{t^2}, t \in (0, 1].$$

$\frac{d}{dt}(Ax(t))$, очевидно, не является ограниченной на $(0, 1] \Rightarrow Ax(t)$ не равномерно непрерывна на $[0, 1] \Rightarrow$ шар, содержащий в себе $x(t)$, не будет отображен в равностепенно непрерывное множество, следовательно, A не является компактным оператором.

35. Ответ: нет. Пусть $x(t) \in C[-1, 1]$ - четная функция. Тогда $Ax(t) \equiv x(t)$. Возьмем $x(t) = |t| \sin \frac{1}{t^2}$, тогда, как рассмотрено ранее, $Ax(t)$ имеет неограниченную производную на множестве $[-1, 0) \cup (0, 1] \Rightarrow$ оператор A не является вполне непрерывным.

36. Докажем, что искомым условием на функцию $\varphi(t)$ является условие $\varphi(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$. Пусть это не так, т.е. $\exists t_0 \in [0, 1] : \varphi(t_0) \neq 0$. Тогда в силу свойств непрерывных функций $\exists \delta > 0 : \varphi(t) \neq 0, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $\varphi(t) \geq 0$ всюду в окрестности точки t_0 (случай $\varphi(t) \leq 0$ рассматривается аналогично). Тогда рассмотрим функцию

$$x_\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, t_0 - \delta], \\ \frac{t - t_0 + \delta}{2\delta} & , \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \\ 1 & , \quad t \in [t_0 + \delta, 1]. \end{cases}$$

Видно, что $\forall \delta \in (0, \delta_0) \quad x_\delta \in \overline{S_1(0)} \subset C[0, 1]$. Имеем

$$|Ax_\delta(t_0 + \delta) - Ax_\delta(t_0 - \delta)| = \varphi(t_0 + \delta) \geq C > 0, \text{ где } C - \text{константа, } \forall \delta \in [0, \delta_0), \text{ т.к. } \varphi(t) \in C(t_0).$$

Итак, $\forall \delta \in (0, \delta_0) \exists x_\delta(t) \in C[0, 1] : |Ax_\delta(t_0 + \delta) - Ax_\delta(t_0 - \delta)| \geq C > 0 \Rightarrow$ образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0, 1]$ при отображении A не есть равностепенно непрерывное множество функций $\Rightarrow A$ не является вполне непрерывным оператором.

Мы пришли к противоречию $\Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, t \in [0, 1]$.

37. A) Ответ: нет.

Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset S_1(0) \subset C^1[0, 1]$, $x_n(t) = \frac{\sin tn}{2n}$; $Ax_n(t) = \frac{\cos tn}{2}$; $\frac{d}{dt}(Ax_n(t)) = -\frac{n \sin tn}{2}$, т.е. $\frac{d}{dt}(Ax_n(t))$ есть неограниченная функциональная последовательность при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ образ замкнутого единичного шара из пространства $C[0, 1]$ при отображении A не есть равностепенно непрерывное множество функций $\Rightarrow A$ не является вполне непрерывным оператором.

В) Ответ: нет.

Рассмотрим последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{S_1(0)} \subset C^2[0, 1]$, $x_n(t) = \frac{\cos nt}{3n^2}$, $t \in [0, 1]$. Тогда $Ax_n(t) = -\frac{\sin nt}{3n}$, $\frac{d}{dt}(Ax_n(t)) = -\frac{\cos nt}{3}$. Докажем, что из $\{Ax_n(t)\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства $C^1[0, 1]$. Пусть это не так и мы выделили такую подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{Ax_n\}_{n=1}^\infty$. $y_{n_k} \rightarrow y \in C^1[0, 1]$ по норме пространства $C^1[0, 1]$, $k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \max_{t \in [0, 1]} |y_{n_k}(t) - y(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |y'_{n_k}(t) - y'(t)| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty \Rightarrow y'_{n_k}(t)y'(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Но $y'_{n_k}(t) = -\frac{\cos n_k t}{3}$, а эта последовательность функций не является равностепенно непрерывной на $[0, 1]$ (т.к. последовательность производных не является равномерно ограниченной), следовательно, по теореме Арцела $\{y'_{n_k}(t)\}$ не может сходиться равномерно на отрезке $[0, 1]$. Мы пришли к противоречию $\Rightarrow$ из $Ax_n(t)$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства $C^1[0, 1] \Rightarrow$ оператор A не есть вполне непрерывен.

С) Ответ: да. Рассмотрим образ F множества $\overline{S_1(0)} \subset C^2[0, 1]$ при отображении A . В пространстве $C^2[0, 1]$ $\overline{S_1(0)} = \{x(t) \in C^2[0, 1] : \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x''(t)| \leq 1\}$, следовательно, если $x \in \overline{S_1(0)} \subset C^2[0, 1]$, то $\max_{t \in [0, 1]} |Ax(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |\frac{d}{dt}(Ax(t))| \leq 1 \Rightarrow F$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным (в силу равномерной ограниченности множества производных) $\Rightarrow$ согласно теореме Арцела F компактно $\Rightarrow$ оператор A является вполне непрерывным.

38. Критерий компактности в l_p : Для компактности замкнутого множества $K \subset l_p$ необходимо и достаточно, чтобы множество K было ограничено и чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \sum_{i=n+1}^\infty |\xi_i|^p < \varepsilon^p, \forall n \geq n_0, \forall x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\} \in K$.

А) Ответ: оператор не является вполне непрерывным.

Рассмотрим вновь образ F замкнутого единичного шара из $l_p \overline{S_1(0)}$. Очевидно, что

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots) : x_n^n = 1, x_n^k = 0, \forall k \neq n$$

принадлежит $\overline{S_1(0)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Следовательно,

$$Ax_n = (0, x_n^1, x_n^2, \dots) : x_n^n = 1, x_n^k = 0, \forall k \neq n$$

принадлежит $F, \forall n \in N$, откуда очевидно следует невыполнение последнего условия критерия компактности множества в l_p . В самом деле, $\forall n_0 \in N \exists n \geq n_0, \exists y_n = Ax_n \in F : \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=n}^{\infty} x_k^2 = 1 \geq \varepsilon^2$ при $\forall \varepsilon < 1$. Итак, оператор A не является вполне непрерывным.

В) Ответ: оператор является вполне непрерывным.

Для доказательства этого покажем, что образ F замкнутого единичного шара из l_2 является компактным множеством, для чего воспользуемся критерием компактности множества в l_p . Ограниченность F совершенно очевидна, т.к. $\forall y = Ax \in F$ имеем

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (y^n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)^2 \leq 1.$$

Ограниченность F доказана. Чтобы доказать его замкнутость, докажем, что A - непрерывный оператор, тогда, в силу замкнутости $\overline{S_1(0)}$ получим замкнутость F .

$$\forall x_1, x_2 \in l_2 \|Ax_1 - Ax_2\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1^k - x_2^k)^2}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (x_1^k - x_2^k)^2 = \|x_1 - x_2\|^2.$$

Следовательно, оператор A является непрерывным. Третье условие критерия компактности множества в l_p проверяется следующим образом:

$$\sum_{k=n}^{\infty} ((A_x)_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty} ((A_x)_k)^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{x_k}{k}\right)^2 \leq \{x \in \overline{S_1(0)}\} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ и любом $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$.

С) Ответ: оператор является вполне непрерывным. Доказательство этого факта проводится совершенно аналогично доказательству предыдущего пункта.

39. В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Действительное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (\lambda_i y_i) = (x, Ay)$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.

Условие на последовательность λ_k , при котором A будет неотрицательным, становится очевидным, если рассмотреть скалярное произведение:

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i x_i) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^2.$$

Отсюда получаем искомое условие:

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k.$$

40. $L_2[0, 1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0, 1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ положить $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0, 1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.

В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$, и неотрицательным, если $\forall x \in L_2[0, 1] : (Ax, x) \geq 0$.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int_0^1 (tx(t))y(t)dt = \int_0^1 x(t)(ty(t))dt = (x(t), Ay(t))$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.

Далее рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), x(t)) = \int_0^1 (tx(t))x(t)dt = \int_0^1 tx(t)^2 dt \geq 0.$$

41. $L_2[0, 1]$ - пространство вещественных функций, определенных и измеримых на отрезке $[0, 1]$, станет гильбертовым, если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ положить $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Существование этого интеграла при любых $x(t), y(t)$ из $L_2[0, 1]$ вытекает из неравенства Буняковского для интегралов.

В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$, и неотрицательным, если $\forall x \in L_2[0, 1] : (Ax, x) \geq 0$.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (Ax(t), y(t)) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{s+t} x(s) ds \right) y(t) dt = \int_0^1 \int_0^1 e^{s+t} x(s) y(t) ds dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{s+t} x(t) y(s) ds dt = \int_0^1 x(t) \left(\int_0^1 e^{s+t} y(s) ds \right) dt = (x(t), Ay(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.

Далее рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (Ax(t), x(t)) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{s+t} x(s) ds \right) x(t) dt = \int_0^1 \int_0^1 e^{s+t} x(s) x(t) ds dt = \\ &= \int_0^1 e^t x(t) dt \cdot \int_0^1 e^s x(s) ds = \left(\int_0^1 e^t x(t) dt \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

42. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} [x(t + \frac{h}{2}) - x(t - \frac{h}{2})] y(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \frac{h}{2}) y(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \frac{h}{2}) y(t) dt \right] = \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(s - \frac{h}{2}) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) y(v + \frac{h}{2}) dv \right] = \\
&= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) [y(s - \frac{h}{2}) - y(s + \frac{h}{2})] ds = \\
&= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [y(t - \frac{h}{2}) - y(t + \frac{h}{2})] dt = \\
&= -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [y(t + \frac{h}{2}) - y(t - \frac{h}{2})] dt = (x(t), -Ay(t)).
\end{aligned}$$

43. Поскольку $\exists A^{-1}$ - ограниченный, то
 $\forall x, y \in H \exists v, w \in H : v = A^{-1}x, w = A^{-1}y$.

Тогда

$$(A^{-1}x, y) = (v, Aw) = (Av, w) = (x, A^{-1}y).$$

44. Предположим, что $\exists x_0 : (A - \lambda I)x_0 = 0$. Тогда $Ax_0 = \lambda x_0$.

Рассмотрим скалярное произведение (Ax, x) и воспользуемся самосопряженностью оператора A :

$$(Ax_0, x_0) = \lambda \|x_0\|^2 = (x_0, Ax_0) = \bar{\lambda} \|x_0\|^2.$$

Следовательно предположение верно только при $x_0 = 0$. Отсюда очевидно следует обратимость оператора $(A - \lambda \cdot I)$.

45. В гильбертовом пространстве оператор A является самосопряженным, если $\forall x, y \in l_2$ выполнено: $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Действительное пространство l_2 становится гильбертовым, если для любых двух его элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

Сходимость этого ряда для любых x и y из l_2 вытекает из неравенства Буняковского для рядов.

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i y_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i (Ay)_i = (x, Ay).$$

Таким образом, оператор A является самосопряженным.

Далее:

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty} (Ax)_i x_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i x_i = \sum_{i=3}^{\infty} x_i^2 \geq 0.$$

Теперь рассмотрим оператор A^2 . Очевидно, $A^2 x = A(Ax) = (0, 0, x_3, x_4, \dots) = Ax$. Поскольку A - самосопряженный оператор, получаем, что оператор $\sqrt{A} = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$.